ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

Новосибирск, 2024

Теорема 5.3 (закон повторного логарифма Хартмана — Винтнера)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с* $\mathsf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathsf{E}X_1^2 = 1$. *Тогда каждая точка отрезка* $[-1, 1]$ *является предельной (в смысле сходимости почти наверное) для последовательности* $\{S_n/(2n\ln\ln n)^{1/2}\}_{n\geqslant 1}$ *и*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1 \quad \text{п. н.} \tag{5.30}$$

Закон повторного логарифма Хартмана — Винтнера

Доказательство

Обозначим, как и ранее, $a_n = \sqrt{2n \ln \ln n}$ при $n \geqslant e^e$. Покажем, что

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} \leqslant 1\right) = 1. \tag{5.31}$$

Доказательство

Пусть $0 < \delta < 1$. Выберем $\tau > 0$ настолько малым, чтобы

$$\alpha = (1+\delta)^2(2 - \exp\{\sqrt{2}(1+\delta)\tau\}) > 1. \tag{5.32}$$

Обозначим $X'_j = X_j I(|X_j| < (\tau/2)(j/L(j))^{1/2})$, $Y_j = X'_j - \mathsf{E}X'_j$, $S'_n = \sum\limits_{j=1}^{n} X'_j$ и $T_n = \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j$.

Тогда $\mathsf{E}Y_j = 0$, $|Y_j| \leqslant \tau(j/L(j))^{1/2}$ п. н. и

$$\mathsf{E}Y_j^2 = \mathsf{D}X'_j \leqslant \mathsf{E}(X'_j)^2 \leqslant \mathsf{E}X_1^2 = 1.$$

Доказательство

Таким образом, последовательность $\{Y_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет условиям леммы 4.7 и, следовательно, из 4.20) при $a = 1$ получаем

$$\mathsf{P}(T_n/a_n \geqslant 1 + \delta) \leqslant e^{-\alpha L(n)},$$

откуда следует неравенство

$$\mathsf{P}(|T_n|/a_n \geqslant 1 + \delta) \leqslant 2\, e^{-\alpha L(n)}.$$

Доказательство

Также заметим, что $T_n/a_n \xrightarrow{P} 0$, поскольку в силу неравенства Чебышева (1.3)

$$\mathsf{P}(|T_n/a_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathsf{D}T_n}{\varepsilon^2 a_n^2} \leqslant \frac{n}{\varepsilon^2 a_n^2} = \frac{1}{2\varepsilon^2 \ln\ln n} \to 0.$$

Применяя лемму 4.6, отсюда получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{T_n}{a_n} \leqslant 1 + \delta \quad \text{п. н.} \tag{5.33}$$

Доказательство

Обозначим $Z_j = X_j - X'_j = X_j I(|X_j| \geqslant (\tau/2)(j/L(j))^{1/2})$ и $U_n = \sum\limits_{j=1}^{n} Z_j$. Используя равенство $\mathsf{E}Z_j = -\mathsf{E}X'_j$ и результаты, установленные при доказательстве леммы 4.8, находим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathsf{E}X'_n|/a_n = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathsf{E}Z_n|/a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}|Z_n|/a_n < \infty.$$

Следовательно,

$$\frac{|\mathsf{E}S'_n|}{a_n} \leqslant \frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{n} |\mathsf{E}X'_j| \to 0$$

по лемме Кронекера.

Доказательство

Далее, так как $S_n = S'_n + U_n = T_n + \mathsf{E}S'_n + U_n$ и $U_n/a_n \to 0$ п. н. по лемме 4.8, то

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{T_n}{a_n} + \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathsf{E}S'_n}{a_n} + \limsup_{n\to\infty} \frac{U_n}{a_n} = \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{T_n}{a_n} \quad \text{п. н.}\end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание (5.33), получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} \leqslant 1 + \delta \quad \text{п. н.},$$

что, в силу произвольности δ, и доказывает (5.31).

Доказательство

Для произвольной последовательности случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ обозначим через $C(\{X_n\})$ множество предельных (в смысле сходимости почти наверное) точек последовательности $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$. Применяя (5.31) к последовательности $\{-X_n\}_{n\geqslant 1}$, получаем

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} \geqslant -1 \quad \text{п. н.} \tag{5.34}$$

Из (5.31) и (5.34) следует, что с вероятностью 1

$$C(\{S_n/a_n\}) \subseteq [-1, 1].$$

Закон повторного логарифма Хартмана — Винтнера

Доказательство

Докажем обратное включение, т. е. что любая точка отрезка $[-1, 1]$ является предельной точкой последовательности $\{S_n/a_n\}_{n\geqslant 1}$. Для этого достаточно доказать, что для некоторой подпоследовательности $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ и для любого $b \in (-1, 1)$

$$\liminf_{k\to\infty} \left| \frac{S_{n_k}}{a_{n_k}} - b \right| = 0 \quad \text{п. н.} \tag{5.35}$$

Доказательство

Зафиксируем $b \in (-1, 1)$ и положим $n_k = k^k$, $k \geqslant 1$. Тогда

$$\left(\frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}}\right)^2 = \left(\frac{1}{1 + 1/k}\right)^k \frac{1}{k+1} \, \frac{\ln k + \ln \ln k}{\ln(k+1) + \ln \ln(k+1)},$$

т. е. $a_{n_k}/a_{n_{k+1}} \to 0$ при $k \to \infty$.

Доказательство

Из установленного выше соотношения $C(\{S_n/a_n\}) \subseteq [-1,1]$ следует, что с вероятностью 1 последовательность $\{S_n/a_n\}_{n\geqslant 1}$ ограничена. Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{S_{n_k}}{a_{n_{k+1}}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{S_{n_k}}{a_{n_k}}\right|\left|\frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}}\right| = 0 \quad \text{п. н.}$$

В силу неравенства треугольника

$$\left|\frac{S_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} - b\right| \leqslant \left|\frac{S_{n_k}}{a_{n_{k+1}}}\right| + \left|\frac{S_{n_{k+1}} - S_{n_k}}{a_{n_{k+1}}} - b\right|,$$

и, следовательно,

$$\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{S_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} - b\right| \leqslant \liminf_{k\to\infty}\left|\frac{S_{n_{k+1}} - S_{n_k}}{a_{n_{k+1}}} - b\right| \quad \text{п. н.}$$

Доказательство

Таким образом, для доказательства (5.35) достаточно показать, что с вероятностью 1 независимые события $A_k = \left\{ \left| \frac{S_{n_{k+1}} - S_{n_k}}{a_{n_{k+1}}} - b \right| < \varepsilon \right\}$ происходят бесконечно часто, что эквивалентно, в силу леммы Бореля — Кантелли, расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k)$.

Закон повторного логарифма Хартмана — Винтнера

Доказательство

Положим $\alpha_k = a_{n_{k+1}}$, $m_k = n_{k+1} - n_k$. Так как случайные величины $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ независимы и одинаково распределены, то $S_{n_{k+1}} - S_{n_k} \overset{d}{=} S_{m_k}$ и, следовательно,

$$\mathsf{P}(A_k) = \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{m_k}}{\alpha_k} - b\right| < \varepsilon\right).$$

Заметим, что $m_k = n_{k+1} - n_k \sim n_{k+1}$ и

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_k}{m_k} &= \frac{a_{n_{k+1}}}{n_{k+1}}\frac{n_{k+1}}{m_k} = \left(\frac{2L(n_{k+1})}{n_{k+1}}\right)^{1/2}\frac{n_{k+1}}{m_k} \to 0;\\
\frac{m_k}{\alpha_k^2} &= \frac{n_{k+1}}{2n_{k+1}L(n_{k+1})}\frac{m_k}{n_{k+1}} = \frac{1}{2L(n_{k+1})}\frac{m_k}{n_{k+1}} \to 0.
\end{aligned}$$

Доказательство

Следовательно, из леммы 4.9 следует, что существует k_0 такое, что для любого $\delta > 0$ и всех $k \geqslant k_0$

$$\frac{m_k}{\alpha_k^2} \ln \mathsf{P}(|S_{m_k}/\alpha_k - b| < \varepsilon) \geqslant -\frac{b^2}{2} - \delta. \tag{5.36}$$

Так как $|b| < 1$, то $b^2 < |b| < |b| + \delta$. Из этого неравенства и соотношения $m_k \sim n_{k+1}$ вытекает, что существует k_1 такое, что для всех $k \geqslant k_1$

$$\frac{n_{k+1}}{m_k} b^2 < |b| + \delta.$$

Отсюда следует, что для всех $k \geqslant k_1$

$$\frac{\alpha_k^2}{2m_k} b^2 = \frac{n_{k+1}}{m_k} b^2 L(n_{k+1}) < (|b| + \delta) L(n_{k+1}).$$

Доказательство

Так как $1 < n_{k+1}/m_k \to 1$, то существует k_2 такое, что для всех $k \geqslant k_2$

$$\frac{\alpha_k^2}{m_k} = 2L(n_{k+1})\frac{n_{k+1}}{m_k} < 3L(n_{k+1}).$$

Таким образом, из (5.36) получаем для всех $k \geqslant k_* = \max\{k_0, k_1, k_2\}$

$$\ln \mathsf{P}(A_k) \geqslant -(|b| + \delta)L(n_{k+1}) - 3\delta L(n_{k+1}) = -(|b| + 4\delta)L(n_{k+1}).$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $0 < \delta < (1 - |b|)/4$. Тогда для всех $k \geqslant k_*$

$$\mathsf{P}(A_k) \geqslant \exp\{-(|b| + 4\delta)L(n_{k+1})\} > \exp\{-L(n_{k+1})\} = \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}.$$

Доказательство

Следовательно,

$$\sum_{k=k_*}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) \geqslant \sum_{k=k_*+1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} = \infty,$$

что и доказывает (5.35).

Из доказанного соотношения $C(\{S_n/a_n\}) = [-1, 1]$ и неравенств (5.31) и (5.34) следует (5.30). $\square$